OVER DE WISSELWERKING TUSSEN WISKUNDE EN PHYSICA IN DE LAATSTE 40 JAREN

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN BUITENGEWOON
HOOGLERAAR AAN DE UNIVERSITEIT
VAN AMSTERDAM OP 21 FEBRUARI 1949

DOOR

J. A. SCHOUTEN

P. NOORDHOFF N.V. • 1949 • GRONINGEN-BATAVIA

Mijne Heeren Bestuurderen van Stad en Universiteit, Dames en Heeren Professoren, Lectoren en Privaat-Docenten, Dames en Heeren Studenten, en voorts Gij allen, die door Uwe tegenwoordigheid de waarde van deze samenkomst verhoogt, zeer gewaardeerde toehoorders,

Vijf en dertig jaar geleden heb ik bij mijn ambtsaanvaarding te Delft een rede uitgesproken over het wezen en de practische beteekenis der directe analyses. Onder een direkte analyse verstond men toen een invariante symboliek, die het uitschrijven van coördinaten althans gedurende de berekeningen onnoodig maakte en het was destijds nog noodig voor dergelijke symbolische methodes een lans te breken. Er is in die 35 jaren veel gebeurd, symbolische methodes worden thans overal gebruikt en zij geven zooveel gemak en arbeidsbesparing dat men wel over het bezwaar heen moet stappen dat zij als zoovele geheimschriften den toegang tot een verwant vakgebied nu niet bepaald gemakkelijker hebben gemaakt.

De vraag naar de al of niet wenschelijkheid van symbolische methodes is dus geen vraag meer en zeker geen geschikt onderwerp voor de bespreking van heden. Daarentegen lijkt het aangewezen het eens te hebben over de ontwikkeling in de laatste 40 jaren en in het bijzonder over de eigenaardige wisselwerking tusschen physica en wiskunde, die wel nooit zoo intens geweest is als juist in dit tijdperk. Mijn voordracht zal uit twee deelen bestaan. Het eerste deel zal wat meer technisch-mathematisch zijn en ik verzoek hier aanwezige niet vakgenooten niet zoozeer op de details te letten dan wel op de hoofdlijnen, die ik zoo zwaar hoop aan te zetten dat zij voor een ieder te volgen te zijn. Het tweede en belangrijkste deel is in meer menschelijke taal en zeker voor een ieder begrijpelijk.

In mijn studietijd trof ik een meetkunde aan, die tot een prachtige en schijnbaar afdoende afsluiting was gekomen. De strijd tusschen de meetkunden van Euclides, van Bolyay en van Lobatschewsky, de controversies tusschen projectieve, affine en metrische meetkunden waren in een hoogere harmonie opgeheven. Immers had Felix Klein al in 1872 in het „Erlanger program" het beginsel uitgesproken dat iedere meetkunde slechts de invariantentheorie is behoorende bij een bepaalde (eindige of oneindige) Lie'sche transformatiegroep en nadien hadden Klein en zijn leerlingen dit beginsel volkomen uitgewerkt en was het inzicht, dat de meetkunde één groot gebouw is met vele kamers, elk geregeerd door een der vele ondergroepen van de alomvattende groep der continue transformaties, gemeengoed geworden van een groote groep van mathematici waartoe ook reeds enkele physici behoorden.

Er is in de geschiedenis der wiskunde een sinistere wet, die zegt, dat wanneer een gebied zóó goed is doorwerkt en belicht, dat er eigenlijk niet veel meer overblijft dan een stelsel van afzonderlijke puzzles, de aandacht der beste mathematici zich spoedig van dit gebied af en andere minder goed doorvorschte gebieden toewendt. Zoo verging het de klassieke differentiaalmeetkunde in drie afmetingen na een periode van grooten bloei en hetzelfde geschiedde met de projectieve meetkunde, die eenmaal in het centrum der belangstelling had gestaan. Als ingedijkte polders kwamen deze gebieden buiten den stroom te liggen, als veilig bezit klaar om vruchten op te leveren waar noodig, maar niet langer tooneel van strijd en overwinning.

Ongetwijfeld ware het in het begin van deze eeuw ook zoo gegaan met de door Klein geordende en geconsolideerde meetkunden, ware het niet dat er omstreeks dien tijd in de physica een probleem opdoemde, dat juist het Klein'sche gebouw der meetkunden zou blijken noodig te hebben. De reeds door Voigt in 1887 even aangeraakte, door Lorentz in 1892 nader beschouwde en in 1906 tot een voorloopige formuleering gebrachte invariantie der Maxwellsche vergelijkingen bij orthogonale transformaties in 4 afmetingen (Lorentz transformaties) wachtte slechts op een physicus vertrouwd met de moderne meetkunde om tot een geheel nieuwen inslag in de physica te voeren. Inderdaad formuleerden Poincaré, die steeds in nauwe betrekking tot Klein had gestaan, en Einstein, die reeds geheel in de traditie van het Erlanger program was opgegroeid, in 1905 onafhankelijk van elkaar het relativiteitsbeginsel, terwijl het aan Einstein als physicus voorbehouden bleef het relativiteitspostulaat te formuleeren, dat invariantie van alle natuurverschijnselen bij de Lorentz-groep verlangt. Voor de physica was het gebeurde een omwenteling, voor de wiskunde daarentegen voorloopig niet meer dan een mooi voorbeeld van een meetkunde met een indefiniete metriek naast vele anderen. Intusschen gingen de gebeurtenissen zeer snel en wist Einstein, wederom gebruik makende van groote hoeveelheden mathematische kennis, opgehoopt in de werken van Riemann, Christoffel en verschillende Italiaansche geometers waaronder vooral Ricci Curbastro, zijn algemeene relativiteitstheorie te formuleeren (afsluiting 1916) waarin de vergelijkingen der physische verschijnselen invariant werden bij algemeene continue transformaties der coördinaten. De ruimte-tijd wereld werd nu een gekromde Riemannsche ruimte, „gekromd" omdat er niet meer van rechte lijnen kon worden gesproken maar alleen van geodetische lijnen, en de eenvoudige relativiteitstheorie van 1906 bleef slechts geldig in iedere „lokale" ruimte-tijd. Op zichzelf was dit mathematisch nog niet verontrustend daar ook de Riemannsche ruimte nog in het Klein'sche schema paste, zij het dan ook dat de ten grondslag liggende Lie'sche groep een zoogenaamde „oneindige" is, die tot een zeker geometrisch object, den „fundamentaaltensor" behoort. Maar toch ontstond door de onverwachte realizeering van zulk een gekromde ruimte in onze eigen ruimte-tijd-wereld een eigenaardig gevoel van wanbevrediging. Onwillekeurig drongen zich vragen op als: hoe moet een proefpersoon zich in zoo'n ruimte voelen, wat zal hij ervaren bij een verplaatsing, e.d. In de geometers van dat tijdsgewricht, die zich in die nieuwe werelden daadwerkelijk wilden inleven en dat binnen de grenzen der bestaande structuur schema's niet of kwalijk konden, ontstond een toestand van spanning, die vroeg of laat tot een ontlading moest voeren. En die ontlading kwam dan ook nog vóór het einde van den eersten wereldoorlog toen onafhankelijk van elkaar een Italiaansch en een Nederlandsch auteur het begrip van het *pseudoparallelisme* introduceerden [1]). Nu is het merkwaardigste aan dit parallelisme dat het niet lang van te voren was ontdekt. De onderzoekingen van Christoffel, Lipschitz, Ricci, Curbastro en vele anderen hadden alles voorbereid en men had eenvoudig maar den „covarianten differentiaal" van Ricci Curbastro nul behoeven te stellen om de pseudoparallele verplaatsing te verkrijgen. Maar niets van dit alles gebeurde en het nieuwe begrip werd eerst gevonden nadat de physica na de algemeene relativiteitstheorie den aanstoot had gegeven. Het is dan ook teekenend dat in de verhandelingen der genoemde twee auteurs beide in den eersten zin van de inleiding uitgaan van de relaticiteitstheorie!

Het nieuwe denkbeeld werkte in hooge mate stimuleerend op het wiskundig onderzoek. Het raderwerk der meetkunde, dat een oogenblik in tevreden zelfbeschouwing dreigde te zullen gaan stil staan, kwam weer op volle toeren en men kan wel zeggen, dat de eigenlijke moderne differentiaalmeetkunde met het pseudoparalle-

---

[1]) Levi Civita, Rend. Circ. Mat. Pal. 42 (1917) 173—205; Schouten, Verh. Kon. Akad. v. Wet. 12 (1918) No 6, 95 blz.

lisme begint. Directe veralgemeening, nu weer geheel onafhankelijk van eenige ervaringswetenschap, voerde tot de theorie der lineaire overbrengingen, waarbij een meetkunde tot stand komt door een voorschrift hoe men locale ruimten (hoe dan ook gedefinieerd) op elkaar kan afbeelden. Zulk een afbeelding behoort steeds tot de een of andere eindige Lie'sche transformatiegroep en zoo ontstaat er weer een indeeling van meetkunden naar de ten grondslag liggende groepen, maar een geheel andere als die van Klein. De meetkunden van Klein hadden als het ware de groep van binnen in de ruimte zelf, de overbrengingsmeetkunden hebben haar alleen van buiten in de betrekkingen tusschen naburige locale ruimten. Bij iedere Klein'sche meetkunde behoort een overbrengingsmeetkunde, die zich tot de eerste verhoudt als de meetkunde op een gebogen oppervlak tot die in een plat vlak, en men kan dus op deze wijze bijvoorbeeld „gekromde" projectieve of conforme meetkunden ontwikkelen.

De nieuwe meetkunden noopten nu andere onderzoekers en onder hen als eersten Eisenhart en Veblen in 1922 [1]), alles eens vanuit een ander gezichtspunt te bezien en weer aan te knoopen aan de Klein'sche opvatting van de Riemannsche meetkunde als de invariantentheorie van een oneindige Lie'sche groep behoorende tot een bepaald geometrisch object. In plaats van een overbrenging legden zij een of meer geometrische objecten ten grondslag en ontwikkelden de bij deze behoorende objectmeetkunde. Alras bleek, dat iedere overbrengingsmeetkunde ook als objectmeetkunde op te vatten was en ook dat de meest interessante objectmeetkunden als overbrengingsmeetkunden konden worden geduid, hetgeen niet weg nam dat het begrip objectmeetkunde tenslotte toch iets ruimer was. Weliswaar gaf Cartan in 1936 in Oslo als zijn meening te kennen, dat de objecttheorie, bijvoorbeeld toegepast op de Riemannsche meetkunde „masque complètement ce qu'il y a en elle de géométrique au sens intuitiv du mot", maar daar stond tegenover dat anderen juist in de objecttheorie de meest „natuurlijke" opvatting zagen. Dit bewijst alleen dat het emotioneele element bij mathematici (gelukkig) een veel grooter rol speelt dan de buitenstaander pleegt te denken. Afgescheiden van alle emoties vulden overbrengingstheorie en objecttheorie elkaar prachtig aan en leidden zij tot allerlei andere onderzoekingen, bijv die over Finsler'sche en aan deze aanknoopende Cartan'sche meetkunden

---

[1]) Proc. Nat. Acad. of Sc. 8 (1922) 19—23.

en die over geometrische objecten als zoodanig. Inderdaad was het bedrijf weer in vollen gang.

Het pseudoparallelisme werkte op de physica terug, eerst direkt door de ontdekking van een nieuw relativistisch effect in de praecessiebeweging van de aarde en vervolgens, na een eerste mathematische generalizeering, door de theorie van Weyl. Reeds in 1910 hadden Cunningham [1]) en Bateman [2]) ontdekt, dat de Maxwellvergelijkingen eigenlijk invariant waren bij een veel ruimere groep dan de 10 parameters tellende van Lorentz, namelijk bij de 15 parameters tellende groep der conforme transformaties. Nu verving Weyl 1918 de Riemannsche overbrenging door een andere, die inderdaad in iedere locale ruimte-tijd behoort tot de conforme groep, alleen was zijn overbrenging niet volledig invariant bij conforme transformaties maar nog mede afhankelijk van de transformaties van een soort vectorveld dat dan met den electromagnetischen potentiaalvector werd geidentificeerd. Het belangrijke was dat Weyl daarmede voor de eerste maal een ,,unificeering" bereikte van gravitatie en electromagnetisme. Een bezwaar was dat bij zijn pseudoparallelisme maatstaven bij rondvoering in electromagnetische velden hun lengte konden veranderen, wat niet in overeenstemming was met de meetresultaten. De pseudoparallelverplaatsing uit de theorie mocht dus niet met de werkelijke parallelverplaatsing worden geidentificeerd en daarmede verloor de theorie veel van haar aantrekkelijkheid. De eenmaal gewekte gedachte van een unificeering liet echter de onderzoekers niet meer met rust en reeds in 1921 wist Kaluza [3]) die te bereiken door het invoeren van een vijfde dimensie. In plaats van den spanning-impuls-energietensor der materie in de gewone theorie met een matrix van 4 rijen en 4 kolommen treedt dan een tensor met een matrix van 5 rijen en 5 kolommen, waarin de vijfde alleen electromagnetische grootheden bevat. De raadselachtige vijfde dimensie bezorgde eerst wat last maar Veblen en Hoffmann [4]) wezen er in 1930 op dat de vijf coördinaten konden worden opgevat als homogene coördinaten in een locale ruimte-tijd. Hier kwam te stade dat de projectieve differentiaalmeetkunde intusschen door verschillende scholen en op verschillende wijzen was ontwikkeld. Bij Veblen en zijn school bleef de homogene behandeling tot de lokale ruimte-tijd beperkt, men had dus hier een ruimte-tijd-wereld met 4 (kromlijnige)

---

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910) 77—98.

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910), 23—264; 469—488.

[3]) Sitz Ber. Preuss Akad. d. Wiss. (1921) 966—972.

[4]) Phys. Rev. 36 (1930) 810—822.

coördinaten en in elke locale ruimte-tijd 5 homogene projectieve coördinaten en een door een kwadratische vergelijking in deze coördinaten vastgelegd 3-dimensionaal hyperoppervlak dat den fundamentaaltensor representeert. Hier in Holland gebruikten wij daarentegen [1]) in de ruimte-tijd-wereld de door v. Dantzig [2]) in 1932 ingevoerde 5 homogene kromlijnige coördinaten, die zich fraaier aan de 5 locale coördinaten aanpasten. Spoedig bleek, dat het niet moeilijk was een unificeerende theorie op te stellen, er kwamen er eigenlijk zelfs veel te veel, die allen met het getal 5 in verband stonden, allen op hun wijze betrekkelijk behoorlijke resultaten lieten zien zoolang het ging om unificeering en allen vrij behoorlijk in elkaar konden worden vertaald. Toch kwam het weer tot een stilstand omdat alles misliep zoodra het ging om het probleem van de verhouding van veld tot deeltje, culmineerende in de vraag hoe een oneindige eigenenergie van puntvormige deeltjes kon worden vermeden. Tegen die vraag bleek ook geen der vijfdimensionale theoriën opgewassen en voorloopig was de stand dus zoo, dat unificeering blijkbaar gemakkelijk kon worden verkregen met behulp van 5 coördinaten hoe dan ook geduid, maar dat het raadsel der eigenenergie niet was opgelost en dat de conforme invariantie voorloopig weer van de baan was.

Van geheel onverwachte zijde kwam er nu hulp voor de conforme theorie. Wederom lag er een groote hoeveelheid mathematisch materiaal opgestapeld dat slechts scheen te wachten op een nieuwen impuls van de physica. De representatietheorie der eindige groepen was reeds lang opgesteld door Frobenius [3]) en Cartan gaf in 1913 [4]) reeds een vrij volledige theorie van de representatie van de halfenkelvoudige continue groepen inclusief een spintheorie voor een willekeurig aantal dimensies, dit laatste onbewust van het feit dat reeds in 1901 E. Waelsch [5]) in zijn binairanalyse beschikte over het geheele apparaat van de 2-dimensionale spin en na 1910 [6]) van de 4-dimensionale spin (dubbel binaire vormen) zonder dat hij met deze dingen eigenlijk iets kon beginnen. Wederom onafhankelijk

---

[1]) Zie bijv. Ann. of Math. 34 (1933) 271—312; Ann. de l'Inst. H. Poincaré 5 (1935) 51—88.

[2]) Math. Ann. 106 (1932) 400—454.

[3]) Sitz Ber. Berl. Akad. (1897) 994—1015; (1899) 482—500; (1900) 516—534; (1903) 328—358.

[4]) Bull. Soc. Math. de Fr. 41 (1913) 53—96.

[5]) Wiener Anzeiger 38 (1901) 303—314, zie verder Jahresber. D.M.V. 24 (1915) 382—389.

[6]) Jahresber. D.M.V. 19 (1910) 90—98.

had A. Young[1]) 1901 al een theorie gegeven over wat men tegenwoordig invariante splitsing van affinoren of ook representatietheorie van de affine-groep zou noemen en was Waelsch met zijn binairanalyse zelfs voor de dimensiegetallen 3 en 4 al doorgedrongen tot invariante splitsingen bij de orthogonale groep. Maar dit alles bleef eigenlijk braak liggen, wat dan soms tragisch was zooals in het geval van Waelsch, die voor zijn levenswerk overal belangstelling trachtte te wekken en die eigenlijk nergens wist te vinden. Tot dat eindelijk in 1925 de lont in het kruit viel en Uhlenbeck en Goudsmit het electron lieten spinnen. Dat voerde dan via de eenvoudige Pauli'sche 2 dimensionale spinruimte in 1927 (het sterfjaar van Waelsch!) tot de vierdimensionale spinruimte van Dirac in 1928, die het verband zou leggen tusschen de relativiteitstheorie en de inmiddels op ieder gebied veld winnende quantenmechanica. Ook hier was er weer een sterke terugslag op de wiskunde, eerst eischte het nieuwe gebied hergroepeering en consolidatie van voorhanden stof, maar spoedig gingen de mathematici al weer aan het werk om de zaak zelf en zagen tal van nieuwe publicaties over de representatie van eindige en continue groepen en over de theorie der spinruimten het licht. Zelfs vatte D. E. Littlewood vanaf 1943[2]) het oude probleem van de invariante ontbinding van affinoren van A. Young weer op, maar nu voor de orthogonale groep en met behulp van spingrootheden, daarmede zonder het te weten denzelfden weg volgend dien Waelsch al voor 3 afmetingen had begaan met zijn binaire vormen.

Wat is nu eigenlijk die spinruimte? In een R_n (vlakke n-dimensionale ruimte met gegeven vasten fundamentaaltensor) beschouwe men een $(n - 1)$-dimensionale eenheidshyperbol. Op die hyperbol liggen voor $n = 2\nu$ *een* stelsel van $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ $(\nu - 1)$-dimensionale *vlakke* uitgebreidheden en voor $n = 2\nu + 1$ *twee* stelsels van elk $\infty^{\binom{\nu+1}{2}}$ ν-dimensionale *vlakke* uitgebriedheden. Bij een orthogonale transformatie in R_n is de bol in zijn geheel invariant en al die vlakke uitgebreidheden en hun doorsnijdingen worden in elkaar getransformeerd op een wijze, die een afbeelding (representatie) is van de orthogonale transformatie in R_n. De spinruimte is nu, populair gezegd, niets anders als het stelsel van deze vlakke uitgebreidheden en hunne doorsnijdingen. Deze uitspraak, hoewel populair, is volkomen correct, al zou het dan ook nogal wat tijd vorderen om precies de verhouding tusschen spinruimte en eenheidsbol aan te

[1]) Proc. Math. Soc. London 33 (1901) 97—146; 34 (1902) 361.

[2]) Proc. Lond. Math. Soc. 49 (1943) 307—327; 50 (1945) 349—379.

geven en bijv. te bewijzen dat de dimensie N van de spinruimte altijd gelijk 2^ν is, dus bijv. $N = 4$ voor $n = 4$ en $N = 8$ voor $n = 6$. In R_4 zijn de vectoren der spinruimte bijv. de ∞^4 gebonden vectoren, die liggen in de ∞^3 rechte lijnen op den eenheidsbol, of wat hetzelfde is, de ∞^4 enkelvoudige bivectoren, die liggen in de ∞^3 platte vlakken op den lichtkegel in ruimte-tijd.

Intusschen is er nog een andere weg om juist voor een R_6 tot de bijbehoorende spinruimte te komen. Het was al aan F. Klein bekend dat men de rechte lijnen in de gewone ruimte kan opvatten als punten van een kwadratisch 4-dimensionaal hyperoppervlak in een projectieve vijfdimensionale ruimte (dus met 6 homogene coördinaten) of, wat op hetzelfde neerkomt, de bivectoren in de vierdimensionale affine ruimte als vectoren in een R_6 (Plücker-Klein'sche correspondentie). Veblen kwam reeds 1930 op het denkbeeld dit toe te passen op de spintheorie. De vierdimensionale affine ruimte wordt dan spinruimte en de coördinaten der R_6 kunnen desgewenscht worden opgevat als de overtallige 6 coördinaten van een vierdimensionale conforme meetkunde. Dit denkbeeld werd vanaf 1933 in Princeton [1]) en ook bij ons in Holland [2]) nader uitgewerkt en daarbij bleek duidelijk, dat de vierdimensionale spinruimte het fraaist en eenvoudigst verbonden is met een R_6, dus met een conforme ruimte-tijd-wereld, en dat zoowel de projectieve behandeling met 5 coördinaten alsook de gewoon relativistische met 4 eerst hieruit door specializatie ontstaan.

Hoe klopt dat nu echter met de dimensie van de spinruimte van een R_6, die toch naar wij zagen $N = 8$ is? In iedere spinruimte liggen altijd twee invariante vlakke uitgebreidheden met dimensie $N/2$, die geen richting gemeen hebben. Bij draaiingen in R_6 blijven deze elk voor zich invariant en bij spiegelingen worden zij eenvoudig verwisseld. Bepalen we ons nu tot draaiingen in een R_n (de spiegelingen kunnen altijd later nog achterhaald worden door bijv. één spiegeling apart te beschouwen), dan kan men voor $n = 4$ met één der uitgebreidheden van de dimensie 2 volstaan op grond van het verrassende feit dat de transformatie in de éene volkomen de transformatie in de andere bepaalt. Dit leidt tot de oorspronkelijke eenvoudige 2-dimensionale spintheorie (Pauli matrices, spinoranalyse van v. d. Waerden). Ook voor $n = 6$ geldt nu iets dergelijks, tengevolge van het optreden van een nieuwe onverwachte inva-

---

1) Veblen, Proc. Nat. Acad. 19 (1933) 462—474.

2) Schouten en Haantjes, Zeitschr. f. Phys. 81 (1933) 405—417; Ann. di Pisa 4 (1935) 175—189.

riant [1]) kan men voor draaiingen in de R_6 werkelijk met één der 4-dimensionale spinruimten uitkomen, en dat leidt dan precies tot dezelfde spinruimte die zich ook uit de Plücker-Klein'sche correspondentie laat afleiden.

Ten tweeden male was dus nu, omstreeks 1934, de conforme meetkunde op den voorgrond gekomen en wel van een geheel onverwachte zijde. Niet ten onrechte kon ik dan ook in mijn rectoraatsrede van 1939 de verwachting uitspreken dat het getal 6 eerlang in de physica een zeer belangrijke rol zou gaan spelen, te meer, omdat het aan Haantjes en mij inmiddels gelukt was een principieele moeielijkheid, die een conforme theorie in den weg scheen te staan, geheel uit den weg te ruimen.

Er is namelijk een incongruentie tusschen de 4 gewone ruimte-tijd-coördinaten en de 6 locale coördinaten in iedere locale ruimte-tijd, die ontstaan wanneer men aan die lokale ruimte-tijd, een conforme meetkunde toekent. Men zou derhalve in de groote ruimte-tijd-wereld 6 homogene v. Dantzig'sche coördinaten willen gaan gebruiken. Daarbij treedt nu een moeielijkheid op. Ligt in een gewone vlakke projectieve ruimte van 3 afmetingen een oppervlak, dan is bekend dat de twee asymptotische richtingen in elk punt vanzelf in dat oppervlak een conforme metriek vastleggen (niet-tegenstaande er in de ruimte *geen* metriek was) en dat de 4 homogene coördinaten in de ruimte op dat oppervlak als overtallige conforme coördinaten kunnen worden gebruikt. Omgekeerd kan men nu, uitgaande van een tweedimensionale ruimte met een conforme meetkunde, een driedimensionale vlakke projectieve ruimte construeeren die die tweedimensionale bevat èn men kan bewijzen, *dat twee op zoodanige wijze geconstrueerde ruimten niet wezenlijk verschillen*, d.w.z. dat zij op elkaar invariant en eeneenduidig kunnen worden afgebeeld. Deze afbeeldbaarheid is natuurlijk zeer belangrijk, men zou immers anders behalve de conforme meetkunde nog de een of andere ongewenschte hulpinvariant noodig hebben om de ruimte te kunnen vastleggen.

In meer afmetingen geldt precies hetzelfde *mits* men eischt dat de conforme meetkunde conformeuclidisch is [2]). Dat kunnen we echter juist niet gebruiken, de ruimte-tijd-wereld zou dan „leeg" blijven. Wij bewezen nu 1935—'36 [3]) dat, uitgaande van een alge-

---

[1]) Deze invariant zal elders worden behandeld.

[2]) D.w.z. transformeerbaar in een euclidische ruimte door middel van een conforme transformatie.

[3]) Proc. Kon. Akad. v. Wet. 38 (1935) 706—708; 39 (1936); Math. Ann. 112 (1936) 594—629; 113 (1936) 568—583.

meene n-dimensionale conforme meetkunde steeds een $(n+1)$-dimensionale ruimte met een bepaalde projectieve overbrenging kan worden geconstrueerd, die de n-dimensionale ruimte bevat, en dat verschillende aldus geconstrueerde ruimten *niet wezenlijk verschillen* mits òf n oneven is òf $n = 4$ is, maar in dit laatste geval dan ook een zekere projectieve tensor van de valentie 2 (van de orde 4 in de afgeleiden van den fundamentaaltensor) verdwijnt. Gelukkig kon ook nog worden bewezen, dat die tensor steeds nul is wanneer de ruimte-tijd-wereld conform-einsteins [1]) is, dus precies in het geval dat de physica noodig heeft. Verder kwam aan het licht dat de massa geen conforminvariant is maar wel het product van een massa met een lengte en werd er in verdere publicaties van Haantjes aangetoond dat er een verband bestaat tusschen conforme transformaties en versnelde systemen [2]).

Bij iedere theorie in 6 coördinaten treedt er natuurlijk een veralgemeening van den materietensor op, die een matrix heeft van 6 rijen en 6 kolommen. De vijfde rij en kolom waren reeds in de projectieve theorie door de electromagnetische verschijnselen ingenomen en men zou dus omstreeks 1935 hebben kunnen opmerken dat, waar zoowel de invariantie van Cunningham en Bateman als de theorie van de spinruimte kennelijk invoering van een zesden coördinaat vroegen, er vermoedelijk een nog niet ontdekt natuurverschijnsel moest bestaan dat de zesde rij en kolom zou kunnen vullen. Merkwaardigerwijze werd echter deze zoo voor de hand liggende opmerking noch door ons noch voor zoover mij bekend door Amerikaansche onderzoekers gemaakt. Ware dit wel het geval geweest, dan zou het mesonveld, dat in 1935 door Yukawa werd voorspeld omstreeks denzelfden tijd dubbel voorspeld zijn. De geschiedenis nam echter een ander verloop, de conforme theorie verzuimde het mesonveld te eischen, maar het mesonveld kwam er langs een anderen weg en eischte een conforme theorie.

Nadat Yukawa 1935 [3]) op het denkbeeld gekomen was de in de kern optredende krachten terug te voeren tot een speciaal soort veld, correspondeerende met een nieuw soort deeltjes, ontdekte Kemmer [4]) in 1938 dat, in de plausibele onderstelling dat de uitdrukking voor de energie positief definiet is, de golffunctie der

---

[1]) D.w.z. transformeerbaar in een einsteinsche ruimte door middel van een conforme transformatie.

[2]) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet 43 (1940) 1288—1299, opnieuw ontdekt door E. L. Hill, Phys. Rev. 72 (1947) 143—149.

[3]) Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17 (1935) 48.

[4]) Proc. Cambr. Phil. Soc. 34 (1938) 354.

nieuwe deeltjes de valentie 2 moest hebben. Daaruit volgde dan het bestaan van vier soorten mesonvelden, het scalaire mesonveld met 5 en het vectorische mesonveld met 10 kentallen en twee velden die ontstaan door verwisseling van scalar en vector met pseudoscalar en pseudovector. Möller en Rosenfeld [1]) vonden daarop in 1940 dat de experimenten juist een zeer speciale combinatie van scalair en vectorisch veld verlangden en daarop ontdekte Möller [2]) in 1941 dat juist die speciale combinatie als het ware vanzelf voor den dag kwam als men 5 coördinaten invoerde. Het belangrijke hiervan was niet zoozeer het vinden van die combinatie, die zooals later bleek niet de eenige en misschien niet eens de beste was, maar het feit dat het door invoering van een meer omvattende fundamenteele groep (hier de projectieve) mogelijk bleek relaties tusschen verschillende velden te fixeeren. Noch belangrijker was echter de vondst van Lubanski en Rosenfeld [3]), die in 1942 konden bewijzen dat de typische relaties tusschen de matrices in de golfvergelijkingen van het mesonveld identiek zijn met de zoogenaamde structuurvergelijkingen van de groep der draaiingen in R_6, d.i. de conforme groep in 4 afmetingen.

Ten derden male kwam zich dus de conforme groep ongevraagd aanmelden. Thans kwam het echter tot een regelrechte uitnoodiging. B. Hoffmann, opmerkzaam geworden op de 5-dimensionale behandeling van het mesonveld, vatte zijn vroegere met Veblen doorgevoerde onderzoekingen over projectieve relativiteit weder op en trachtte 1947 [4]) de veldvergelijkingen af te leiden uit een variatieprincipe in 5 coördinaten. Daar de resultaten niet zeer bevredigend waren overwoog hij reeds in dat jaar de mogelijkheid van een conforme behandeling en werkte dit denkbeeld uit in twee verhandelingen in 1948 [5]). Hij gebruikt nog niet de conforme groep maar een ondergroep en zijn onderzoekingen, die hij zelf nog als exploraties betitelt zijn nog allerminst afgesloten. Dit neemt niet weg dat hem de eer toevalt als eerste het conforme character van het mesonveld te hebben doorzien en het getal 6 optredende in de golffunctie te hebben verklaard.

Ook de onderzoekingen van H. Flint zijn misschien in verband te brengen met een conforme mesontheorie, hoewel zij uit een geheel andere bron stammen. Evenals Yositaka Mimura trachtte

---

[1]) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 17 (1940).
[2]) Danske Vid. Selsk. math.-fys. Medd. 18 (1941).
[3]) Physica 9 (1942) 117—134.
[4]) Phys. Rev. 72 (1947) 458—465.
[5]) Phys. Rev. 73 (1948) 30—35; 1042—1046.

hij reeds 1935—'37 [1]) de lengte van het lijnelement te vervangen door een matrix. Van 1940 [2]) af gebruikt hij 5 coördinaten. Hij gaat uit van een geunificeerde theorie en introduceert dan een mesonveld door middel van een ykfacor in de maat op dezelfde wijze als Weyl dat deed in de 4-dimensionale theorie. Zijn mesonveld staat dus in dezelfde verhouding tot gravitatie-electromagnetisme als het electromagnetische veld tot de gravitatie. Nu riekt deze variabele ijkfaktor sterk conform en men komt er dus vanzelf toe zich af te vragen of niet de invoering van 6 coördinaten zou kunnen leiden tot een belangrijke vereenvoudiging van Flint's theorie. Er is een bezwaar, Flint schijnt te werken met invariante lengten en massa's terwijl conform alleen het product van massa en lengte invariant kan zijn, maar dat kan liggen aan het totaal andere uitgangspunt, dat een vergelijking uiterst moeielijk maakt.

In het voorgaande heb ik aan de hand van een aantal voorbeelden getracht te schetsen hoe telkens weer wiskunde en physica stimuleerend op elkaar inwerken. Bezien wij deze inwerking nader en vestigen wij de aandacht speciaal op effecten van groot formaat, dan zien wij schematisch de folgende figuur [3]). Op wiskundig gebied is er eerst een tijdperk waarin een groote hoeveelheid materiaal wordt bijeengebracht en tot een geordend geheel verwerkt. Daarbij wordt niet gedacht aan practische toepassing maar zucht naar weten en naar aesthetische bevrediging schijnt de eenige drijfveer te zijn. Kenmerkend voor deze periode is ook een groot enthousiasme bij de beoefenaars. Na deze periode, die ik met den naam van „mathematische voorbereiding" wil aanduiden, dreigt een zekere zelfvoldaanheid tot stilstand te voeren. Intusschen hebben zich in de physica allerlei moeielijkheden opgehoopt [4]), die langzamerhand onhoudbaar worden. Dan komt de inslag, een mathematisch voldoende georiënteerd physicus maakt gebruik van het gedurende de mathematische voorbereiding opgehoopte en geordende materiaal en ontketent in de physica een verlossende omwenteling. Achteraf bezien lijkt dan alles erg eenvoudig en verbaast men er zich over dat de physica den sleutel niet al lang zelf had gevonden. De physica gaat nu haar materiaal opnieuw ordenen en nieuw materiaal vergaren. Daarbij wordt niet gedacht aan eenig

---

[1]) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441.

[2]) Phil. Mag. 29 (1940) 330.

[3]) Met „wiskunde" en „physica" duid ik voor het gemak die bepaalde onderdeelen dier wetenschappen aan, die ter sprake komen.

[4]) Men denke bijv. eens aan mechanische aethermodellen e.d.

nut voor de wiskunde, eenige drijfveer schijnt te zijn zucht tot ordelijke aansluiting aan het experiment en de periode, die we „physische voorbereiding" zullen noemen, kenmerkt zich weer door groot enthousiasme. Het proces wordt met aandacht gevolgd door eenige physisch voldoend georiënteerde mathematici en een van hen vindt in al die nieuwe denkbeelden plotseling iets dat voor de wiskunde een geheel nieuwe inslag beteekent. De mathematische molen komt weer op gang en draait lustig verder, waarbij men achteraf weer verbaasd is een inductie van de physica noodig gehad te hebben. Schematisch zien wij dus dat een mathematische voorbereiding door een inslag voert tot een physische nawerking, die na consolidatie physische voorbereiding wordt voor een inslag met mathematische nawerking, enz. Natuurlijk beweer ik niet dat de volgens dit schema verloopende wisselwerking tusschen wiskunde en physica de eenige is. We hebben immers ook uitdrukkelijk alleen naar groote effecten gekeken. Het andere uiterste, de voortdurende dagelijkse wisselwerking, de gewone mathematisch-physische „kleinhandel", bestaat even goed en er zijn tal van tusschenvormen.

Maar bezien wij enkele voorbeelden. De consolidatie van de meetkunde in de Klein'sche school vormde de mathematische voorbereiding voor den relativistischen inslag in de physica; verdere ordening en consolidatie tot algemeene relativiteitstheorie was de physische voorbereiding voor den inslag van het pseudoparallelisme in de wiskunde. Intusschen was er in de wiskunde een andere periode van voorbereiding aan den gang, waarin eenerzijds representatietheorie van eindige en oneindige groepen, anderzijds theorie van eigenwaarden en eigenfuncties werden ontwikkeld, die juist materiaal konden leveren dat voor den quantenmechanischen inslag in de physica onontbeerlijk was. De zich consolideerende quantenmechanica gaf weer den stoot aan allerlei zuiver mathematische onderzoekingen, te midden waarvan wij ons thans bevinden en die nog moeielijk te overzien zijn en inmiddels had de wiskunde er via pseudoparallelisme en objecttheorie al weer voor gezorgd dat nieuwe vormen van meetkunde als algemeene projectieve en conforme gereedstonden toen de physica die zou blijken noodig te hebben. Telkens dus een werken op eigen gebied, *bewust* met op dit eigen gebied gerichte doelstellingen doch *onbewust* vóórwerkend voor het andere gebied. De hier gesignaleerde figuur is zeer in het oog vallend en dan ook niet onopgemerkt gebleven. Verschillende schrijvers hebben op het bestaan van een dergelijk eigenaardig verband genezen. Reeds in 1914 schreef Voss [1]) „Hätten

[1]) Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart, Berlin 1914.

die Griechen, unbekümmert um eine praktische Anwendung, nicht die Theorie der Kegelschnitte entwickelt, so würde Kepler wohl kaum das Geheimniss der Planetenbewegung enträtselt haben" en hij geeft daar ter plaatse nog een aantal andere treffende voorbeelden en een desbetreffend citaat van v. Humboldt. F. Klein wijst er in zijn bekende „Vorlesungen über die Entwiklung der Mathematik im 19-ten Jahrhundert" met nadruk op [1]) „dass die Physiker die mathematischen Hilfsmittel, dessen sie sich bei der Durchführung ihrer modernen Spekulationen bedienen, in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fertig ausgebildet vorfinden" en spreekt zijn meening over dit feit wel zeer duidelijk uit waar hij op een andere plaats zegt [2]): „Hier möchte ich nun auf den eigentümlichen Zusammenhang der reinen und angewandten Wissenschaft hinweisen, den ich nach Leibnizschem Vorbild als ‚prästabilierte Harmonie' bezeichne, und der bewirkt, dass die Theorie sehr häufig gerade die Gebilde schafft und ausbaut aus rein wissenschaftlichem Trieb, welche die Anwendung bald darauf zur Bewältigung der ihr von aussen zuströmenden Problemen benötigt." Ook Weyl [3]) spreekt 1928 van de „unverkennbare geheimnissvolle Parallelität" tusschen moderne wiskunde en physica en Slater [4]) wijst er 1946 op dat telkens weer een vooruitgang in de physica de meest waardevolle ontwikkelingen in de wiskunde stimuleert. Dit zijn zoo enkele plaatsen, die mij toevallig in de herinnering bleven. Historici kennen er stellig veel meer. Het belangrijke punt is, dat hier wordt erkend of althans vermoed dat er tusschen twee gebieden van menschelijke werkzaamheid [5]) een soort van, al of niet collectieve, onbewuste doelgerichte werking bestaat van hetzelfde soort als men die aantreft bij organismen of groepen van organismen. Dat zou dan met zich brengen dat in het beschrijvingsschema naast causale ketens ook finale ketens zouden moeten worden opgenomen. Uitdrukkelijk moet er echter op worden gewezen, eenerzijds, dat men tegenwoordig in het toelaten van finale ketens niets onwetenschappelijks meer ziet, anderzijds dat het gebruik van zulke ketens niets te maken heeft met de populaire teleologie die de natuur als geheel volgens het een of andere wijze plan wenscht te zien ingericht. Van volkomen onverdachte positivistische zijde

---

[1]) L.c. II 135.

[2]) L.c. I 150.

[3]) Gruppentheorie und Quantenmedranik, voorwoord eerste druk.

[4]) Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 392—400.

[5]) Wat hier voor twee speciale gebieden is geformuleerd zou natuurlijk voor alle gebieden moeten gelden.

wordt dit duidelijk erkend, bijv. waar Jordan zegt dat de finale wijze van beschouwing een onontbeerlijk element der biologische begripsvorming is [1]) en waar hij verklaart dat een dusdanig in gebruik nemen van finale beschrijvingselementen in geen enkel opzicht de deur opent voor enige vorm van mystieke of metaphysische „natuurverklaring". Dit laatste is trouwens vanzelfsprekend daar het een positivist nooit te doen is om een natuurverklaring (die hij als schijnprobleem beschouwt) maar alleen om begripsverheldering door doelmatig geordende natuurbeschrijving. Ook behoeft er allerminst angst te bestaan dat finale beschouwingswijzen zouden kunnen voeren tot bespiegelingen over een „laatste doel". De quantenmechanica heeft toch geleerd dat het wel zin heeft van afzonderlijke causale ketens gebruik te maken, die echter principieel nooit tot één causaal geheel kunnen worden samengesmeed, en waar men dus wel bezwaarlijk kan onderstellen dat het met eventueele finale ketens anders gesteld zou zijn, blijken het „laatste doel" te zamen met de „eerste oorzaak" ficties te zijn, die slechts door ongeoorloofde extrapolaties konden ontstaan.

In de eerste plaats moet nu de vraag worden beantwoord of het bestaan van finale ketens in het schema der wisselwerking tusschen wiskunde en physica aan de ervaring kan worden getoetst. Aan de hand van een bepaalde wel geconstateerde voorbereidingsperiode bijv. in de wiskunde zou men moeten gaan voorspellen dat juist de hier opgehoopte stof weldra in de physica noodig zou zijn. Het werkelijke verloop geeft dan de toetsing. Ook kan men in het verleden teruggaan en vindt dan toetsing in het bekende historische verloop. Zulk een onderzoek is zeker mogelijk, maar het kan alleen worden uitgevoerd door werkelijke historici, die niet alleen groote bekwaamheid moeten bezitten, maar bovendien zoo vertrouwd moeten zijn met vele uiteenloopende gebieden van wiskunde en physica, dat zij met die geheele stof meeleven en alle verbanden als het ware voelen. Er is nog een andere weg, die veel minder goed is, maar op een betrekkelijk gemakkelijke manier voert tot een zij het dan ook minder betrouwbaar resultaat. Men kieze een onderwerp uit de physica en ontwerpe aan de hand van uitspraken van goede physici (niet van mathematici!) een prognose van de mathematische middelen, die vermoedelijk op dat gebied noodig zullen worden. Vervolgens dient te worden nagegaan of er nu inderdaad groepen van wiskundigen zijn, die zich uit zuiver theoretisch interesse met élan op deze onderwerpen hebben geworpen en of deze

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 287, 292.

groepen al tot een zekere consolidatie gekomen zijn. Vooral aan dat élan hecht ik veel waarde. Overal waar in de natuur onbewust doelgerichte handelingen plaats hebben, worden deze, zooals bekend is, met een onmiskenbaar élan uitgevoerd. Klopt een en ander niet, dan spreekt dit tegen de organische opvatting, klopt het echter wel dan moet men natuurlijk het werkelijke verloop nog afwachten maar er is althans een merkwaardig samentreffen geconstateerd.

Als voorbeeld kies ik hier de kernphysica. Vele physici zijn het er duidelijk over eens dat in het kleine onze gewone ruimte-tijd geometrie niet meer opgaat. Bohr [1]) spreekt 1926 van een „tiefgehendes Versagen des raumzeitlichen Bildes mittels welches man bisher die Naturerscheinungen zu beschreiben versuchte"; Pauli [2]) zegt 1933 dat niet alleen het veldbegrip maar ook het ruimte-tijd begrip in het kleine een principieele verandering moet ondergaan; Dirac [3]) verklaart 1928 dat de verdere vooruitgang ligt in de richting van het invariant maken van de vergelijkingen bij steeds meer omvattende transformatiegroepen (dat wil dus zeggen bij andere meer algemeene meetkunden) en nog duidelijker in 1938 [4]) dat in het binnenste van het electron de elementaire eigenschappen van ruimte en tijd hun geldigheid verliezen; Flint [5]) en Yositaka Mimura [6]) komen 1935 met een eigenaardig lijnelement dat geen lengte is maar een matrix en ook Hartland en Snijder gaan 1947 in die richting; Born [7]) verlaat 1938 de metriek voor ruimte en tijd in het kleine en voert daarvoor in de plaats een metriek voor impuls-energie in, hetgeen eigenlijk neerkomt op de invoering van een oneindig dimensionale ruimte en in die richting gaan ook March [8]) en v. Dantzig [9]) met hun verzamelingsfuncties, maar daarmede ben ik dan al bij de mathematici terecht gekomen, die ik in dit verband eigenlijk niet mee wil laten spreken. Inderdaad een overstelpende hoeveelheid aanwijzingen, die alle in de richting gaan

---

1) Naturw. 14 (1920) 1.

2) Handb. der Physik XXIV 1, Quantentheorie, 2de druk 272.

3) Quantummechanics, 1e druk, voorrede.

4) Proc. Roy. Soc. 167 (1938) 160.

5) Proc. Roy. Soc. 150 (1935) 421—441; 159 (1937) 45—56.

6) Journ. of Sc. Hirosima Univ. 5 (1935).

7) Proc. Roy. Soc. 165 (1938) 291-303; 166 (1938) 552—557.

8) Die Naturwisschenschaften 26 (1938) 649—56.

9) Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. 37 (1934) 521—26; 526—31; 644—52; 825—36; 39 (1936) 126—31; 785—94; Proc. Cambr. Phil. Soc. 30 (1934) 421—27. Comptes Rendus Oslo 1936 II 225—27; Erkenntniss (1938) 142—46. Inaugureele rede Delft 1938. Zie verder voor overzicht Schouten, rectoraatsrede Delft 1939.

van een verruimde metriek, erger nog een ametrische meetkunde of nog erger een verzamelingsleer of topologie in plaats van een meetkunde. Vergelijken we dit nu nog met de ontwikkeling van de theorie van het mesonveld. Spintheorie gaf eenerzijds aanleiding tot de ontwikkeling van de spin voor meer dimensies, anderzijds tot den opbouw van een conforme theorie. De conforme theorie past in het schema van de zooeven geëischte verruimde metriek. Voor de hoogere mesonvelden moet men wel verwachten dat zij de hoogere spin zullen opeischen, welnu de theorie hiervan ligt klaar en er werd uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes aan gewerkt (Cartan, Weyl, Brauer). Verder zullen die hoogere mesonvelden allicht niet tevreden zijn met de conforme meetkunde en een uitbreiding eischen waarvoor dan als naastliggende zeker de conforme Finslersche meetkunde het eerst in aanmerking komt. Inderdaad is nu aan de Finsler'sche meetkunde door tal van onderzoekers uit zuiver theoretisch interesse met élan en succes gewerkt en ligt er een groote hoeveelheid materiaal klaar, voor zoover mij bekend nog niet met de fine touche der conformiteit, die echter vermoedelijk gemakkelijk aan te brengen is. Gezien de vergaande eischen, die wij zooeven hebben hooren stellen is het niet aan te nemen dat deze verruimingen iets anders zijn dan overgangsstadia en dat het tenslotte via oneindig dimensionale ruimten en verzamelingsfuncties naar de topologie toegaat. Inderdaad, waar principieel niet meer gemeten kan worden, behoudt alleen nog de topologie het woord. Dat de topologie uit zuiver theoretische belangstelling met élan en succes bewerkt is en tot een zekere afsluiting is gekomen zal wel niemand ontkennen en het was mede het enthousiasme dat ik altijd bij topologen aantrof en dat ik nu weer op den laatsten topologendag in Amsterdam mee mocht beleven, dat bij mij de gedachte nog vaster vorm deed aannemen, dat er hier heftige onbewuste natuurkrachten bezig waren, die zeker iets tot stand moesten brengen dat ook in grooter verband zijn waarde zou toonen.

De topologie is een der laatste woorden van de wiskunde. Maar er is een nog later woord, het grondslagenonderzoek. Dat dat onderzoek niet op practische toepassingen gericht is, is duidelijk, en dat het met élan en met succes wordt uitgevoerd behoeft in Amsterdam zeker niet te worden bewezen. Merkwaardig is het nu, dat Reichenbach [1]) in zijn laatste boek over de philosophische grondslagen der quantenmechanica zeer duidelijk heeft gewezen

[1]) Philosophical Foundations of Quantum Mechanics, University of California Press 1946.

op de beteekenis van een driewaardige (dat is dus een niet klassieke) logica voor de quantenmechanica. Anderzijds is door Jordan [1]) uitgesproken, dat de ordening der levenlooze verschijnselen, die wij tegenwoordig quantenmechanica noemen, niets anders is als een limietgeval van een ordening, die ook de levensverschijnselen mee zou moeten omvatten. Hij zegt zeer duidelijk dat „die angemessene Auffassung die sein dürfte, dass die anorganischen Phänomene und Gesetzmässigkeiten ein *vereinfachter Grenzfall* der organischen sind." Waar nu reeds de quantenmechanica in haar huidig stadium een driewaardige logica verlangt is de onderstelling niet gewaagd, dat die toekomstige „organica" ook meerwaardige logica's zou gaan eischen en misschien zelfs wel die oneindig waardige, die door Heyting in verband gebracht is met het formeele schema der intuitionistische wiskunde. Ware dit zoo dan zou er ook aan het grondslagenonderzoek duidelijk een onbewust doelgerichte kant zijn.

Concludeerende mogen wij wel zeggen dat de hier zeer vluchtig geschetste toetsing van de mogelijkheid van finale ketens aan het voorbeeld der kernphysica werkelijk geen slecht, ja eigenlijk een verrassend gunstig resultaat heeft opgeleverd. En dat brengt ons dan direct tot de vraag wat het nut van de nieuwe causaal-finale beschouwingswijze zou kunnen zijn. Zeker *niet* dat wij mathematici de ontdekking van een onbewuste doelgerichtheid noodig zouden hebben om daaraan het goed recht onzer abstracte onderzoekingen te ontleenen. Dat goede recht hebben wij ook zonder dit alles en hier geldt nog steeds het trotsche woord van Jacobi „que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain". Maar van een algemeen standpunt is het toch kennelijk wel van het grootste belang dat alle verbanden, causaal en finaal, tusschen alle verschillende gebieden van menschelijke werkzaamheid zooveel mogelijk worden gekend en schematisch wel geordend. Ook is er nog een zekere practische kant, er mag namelijk wel eens een lans gebroken worden voor het goed recht en het groote nut van het bij elkaar over de heining kijken, en wel grondig kijken, niet alleen met behulp van popularizeeringen. Indien dit eens meer geregeld en meer systematisch dan tot nu zou kunnen gebeuren, dan zou dit het proces van wederzijdsche inductie in niet onbelangrijke mate kunnen versnellen. Daarbij denk ik natuurlijk niet aan wiskunde en physica alleen. Het besef dat er een aardige kans bestaat dat er aan de andere zijde van de heining iets bruikbaar ligt te wachten, zou hier een stimulans kunnen zijn.

---

[1]) Anschauliche Quantentheorie, Berlin 1936, 301.

Mijne Heeren Bestuurderen van Stad en Universiteit,

Met mijn dank voor het in mij gestelde vertrouwen geeft ik U gaarne de verzekering dat ik mijn functie hier met vreugde aanvaard en dat ik in de mij nog resteerende jaren alles zal doen om mijn onderwijs zoo vruchtbaar mogelijk te doen zijn en mijn geboortestad Amsterdam eer aan te doen.

Dames en Heeren Professoren der Amsterdamsche Universiteit,

Wanneer ik zeg dat ik mij verheug in Uwen kring te worden opgenomen, dan zult U uit wat ik over samenwerking en wederzijdsche inductie heb gezegd naar ik hoop opmaken dat deze verheugenis allerminst platonisch behoeft te blijven en dat ik steeds gaarne tot samenspreking en samenwerking bereid zal worden gevonden.

Mijne Heeren Mathematische en Physische Collega's in de Amsterdamsche Faculteit,

Wanneer ik hier met het gewone verhaaltje zou komen dat ik met een zekeren schroom in Uw midden plaats neem dan zoudt U dat toch niet gelooven. U zult mij echter wel gelooven wanneer ik mijn groote vreugde over mijn benoeming hier uitspreek. De meesten van U kennen mij al vele jaren en zeer goed, zoodat U geen kat in den zak koopt. Uit den aard der zaak zal ik mij zoo min mogelijk bemoeien met vragen van bestuur en beleid, die ik in Uwe handen veilig weet, en mijn krachten geheel wijden aan wetenschappelijke samenwerking. Gaarne zou ik ieder van U iets persoonlijks zeggen maar dat zou te lang worden en ik maak dus slechts twee uitzonderingen.

Waarde Brouwer,

Dat gij door ernstige gezondheidsredenen verhinderd zijt hier tegenwoordig te zijn, doet mij zeer leed. Moge Uw kuur in het buitenland U volledige genezing brengen zoodat gij spoedig weer geheel hersteld in ons midden kunt terugkeeren.

Waarde Clay,

Oude vriend, onze kennismaking gaat terug tot de collegebanken en wij hebben in al die jaren heel wat meegemaakt en veel gemeenschappelijke interessen gehad. Nooit had ik kunnen denken dat het leven ons nog eens zou samenvoeren in de rollen van Voorzitter der Faculteit en jong benoemd collega. Daar is iets aardigs in, dat wij beiden weten te apprecieeren.

Mijne Heeren Collega's uit Delft,

Ik apprecieer het buitengewoon hier gezichten te zien die mij aan mijn oude veste herinneren. U is bekend dat ik in Delft altijd prettig heb gewerkt en dat alleen een zeer bijzondere samenloop van omstandigheden mijn vertrek van daar tengevolge had. Wees er derhalve van overtuigd dat de goede verstandhouding tusschen het Mathematisch Instituut te Delft en de Mathematische Instellingen te Amsterdam steeds mijn volle belangstelling zal hebben.

Hier aanwezige Vrienden uit Epe,

Toen ik tijdens den oorlog toevallig naar Epe verslagen werd, had ik niet gedacht dat ik daar zoo spoedig zou assimileeren. In het bijzonder in de Rotary Club Epe, mede hier vertegenwoordigd, mocht ik een vriendenkring vinden, die door mij zeer op prijs wordt gesteld. Uw aller aanwezigheid hier, getuige van Uw belangstelling voor mijn persoon en werk, stemt mij tot dankbaarheid.

Dames en Heeren Studenten,

Ten slotte kom ik hier in Amsterdam voor *U*. Er zullen er allicht onder U zijn, die mijn rede van vandaag wat te fantastisch, te weinig exakt en te emotioneel hebben gevonden. Hen kan ik de verzekering geven dat het in de collegezaal anders zal zijn en dat daar weer het strenge mathematische betoog zal weerklinken. Gelukkig kunnen ook wij geometers ons tegenwoordig permitteeren streng te zijn en zoogenaamd „intuitieve" bewijzen, die in werkelijkheid geen bewijzen zijn maar illustraties, ook werkelijk alleen als illustratie te gebruiken. Alleen op één punt zal het emotioneele nog doorbreken en dat is waar ik U er op zal wijzen dat de mathematicus een scheppend kunstenaar is en zijn doel in de eerste plaats het ontwerpen van gedachteconstructies van onvergankelijke schoonheid. Moge het mij gegeven zijn nog velen van U te doordringen van dat enthousiasme voor de schoonheid der wiskunde dat mij reeds vervulde toen ik nog een jongmaatje was en dat nog niet in het minst is verflauwd.

Ik dank U voor Uw aandacht.